Межрегиональная олимпиада по математике

Условия задач 10 класс

1. (**2 балла**) Про натуральное число x сделано шесть утверждений:

$$3x > 91$$

$$x < 120$$

$$x < 27$$

$$4x > 37$$

$$2x \geq 21$$

$$x > 7$$

Известно, что только три из них верны, а три неверны. Найти x.

2. **(3 балла)** При каких целых p, q значение многочлена $Q(x) = x^3 + px + q$ делится на 3 при любом целом x?

3. **(4 балла)** Решите уравнение $\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8\cos 4x + \dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$.

4. **(4 балла)** При подготовке к экзамену три школьника решали 100 задач. Каждый школьник решил по 60 задач, причем каждую задачу кто-нибудь решил. Задача считается трудной, если ее решил только один школьник. Легкой считается задача, которую решили все три школьника. Каких задач больше – легких или трудных ? Насколько?

5. (**5 баллов**) Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых справедливо равенство $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$.

6. **(5 баллов)** Точка ***D*** лежит на продолжении стороны ***AC*** треугольника ***ABC***, площадь которого равна ***S***; при этом точка ***A*** находится между ***D*** и ***C***. Пусть ***O*** – точка пересечения медиан треугольника ***ABC***. Известно, что площадь треугольника ***DOC*** равна S_1. Выразите площадь треугольника ***DOB*** через ***S*** и S_1.

Решение задач 10 класс

1. **(2 балла)** Про натуральное число x сделано шесть утверждений:

$$3x > 91$$
$$x < 120$$
$$x < 27$$
$$4x > 37$$
$$2x \geq 21$$
$$x > 7$$

Известно, что только три из них верны, а три неверны. Найти x.

Решение. Преобразуем исходную систему неравенств

$$x > \frac{91}{3}$$
$$x \geq \frac{21}{2}$$
$$x > \frac{37}{4}$$
$$x > 7$$
$$x < 27$$
$$x < 120$$

Первое неравенство не выполняется, поскольку в противном случае выполняются сразу четыре неравенства. Значит, $x \leq \frac{91}{3}$, и шестое неравенство выполнено.

Второе неравенство также не выполняется, поскольку в противном случае выполнены четыре неравенства: второе, третье, четвертое и шестое. Значит, $x < \frac{21}{2}$, и пятое неравенство также выполнено.

Третье неравенство не выполняется, поскольку в противном случае выполнены четыре неравенства: третье, четвертое пятое и шестое. Значит, $x \leq \frac{37}{4}$.

Итак, выполнены четвертое, пятое и шестое неравенства, а первые три не выполнены.

Теперь сразу видно, что искомое число $x \in \{8,9\}$.

Ответ: $x \in \{8,9\}$

2. **(3 балла)** При каких целых p, q значение многочлена $Q(x) = x^3 + px + q$ делится на 3 при любом целом x?

Решение. 1. $Q(0) = q$, следовательно, q делится на 3.

2. $Q(1) = p + 1 + q$, следовательно, $p + 1$ делится на 3.

3. Пусть теперь q и $p + 1$ делятся на 3. Представим данный многочлен в виде

$$Q(x) = x^3 - x + (p+1)x + q = x(x-1)(x+1) + (p+1)x + q.$$

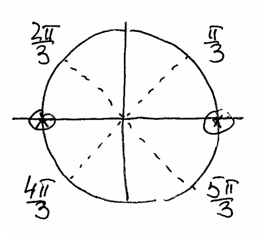
Первое слагаемое делится на 3 при любом целом x. Второе и третье слагаемые делятся на 3 по выбору p, q.

Ответ: q и $p + 1$ должны делиться на 3.

3. **(4 балла)** Решите уравнение $\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8\cos 4x + \dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$.

Решение: О.Д.З. $x \neq \dfrac{\pi}{2}k, k \in Z$.

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8\cos 4x + \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$



$$\frac{\sin^2 3x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 3x}{\sin^2 x\cos^2 x} = 8\cos 4x \Leftrightarrow \frac{\sin 2x \sin 4x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x} = 8\cos 4x \Leftrightarrow \frac{8\sin^2 2x\cos 2x}{\sin^2 2x} = 8\cos 4x$$

$\Leftrightarrow$ (с учетом О.Д.З.) $\cos 2x = \cos 4x \Leftrightarrow -2\sin 3x \sin x = 0$.

1) корни уравнения $\sin x = 0$ не удовлетворяют О.Д.З. ;

2) $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi n}{3}, n \in Z$, но с учетом О.Д.З. $n \neq 3k, k \in Z$, то есть отбрасываются отмеченные на рисунке крестиком точки.

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi m, m \in Z$.

4. **(4 балла)** При подготовке к экзамену три школьника решали 100 задач. Каждый школьник решил по 60 задач, причем каждую задачу кто-нибудь решил. Задача считается трудной, если ее решил только один школьник. Легкой считается задача, которую решили все три школьника. Каких задач больше – легких или трудных ? Насколько?

Решение. Пусть

x_i - количество задач, решенных только i-м учеником,

$y_{i,j}$ - количество задач, решенных только i-м и j-м учеником,

z - количество задач, решенных всеми учениками (число легких задач)

Тогда число трудных задач равно $x_1 + x_2 + x_3$.

По условию имеем систему из четырех линейных уравнений относительно 7 неизвестных

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{2,3} + z = 100 \\ x_1 + y_{1,2} + y_{1,3} + z = 60 \\ x_2 + y_{1,2} + y_{2,3} + z = 60 \\ x_3 + y_{1,3} + y_{2,3} + z = 60 \end{cases}$$

Из этой системы можно найти, что $x_1 + x_2 + x_3 - z = 20$. Последнее равенство и дает ответ задачи.

Ответ: трудных задач на 20 штук больше, чем легких.

Другое решение состоит в применении формулы включения-исключения для подсчета мощности объединения трех множеств

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|.$$

Здесь A - множество задач, решенных 1-м учеником, $|A| = 60$

B - множество задач, решенных 2-м учеником, $|B| = 60$

C - множество задач, решенных 3-м учеником, $|C| = 60$

$A \cap B \cap C$ - - множество задач, решенных всеми учениками (множество легких задач),

$A \cup B \cup C$ - множество всех задач, $|A \cup B \cup C| = 100$.

Тогда множество трудных задач описывается равенством

$$(A \cup B \cup C) \setminus \big((A \cap B) \cup \big((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) \big) \cup \big((B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) \big) \big).$$

Мощность данного множества равна

$$|A \cup B \cup C| - |A \cap B| - \big(|A \cap C| - |A \cap B \cap C| \big) - \big(|B \cap C| - |A \cap B \cap C| \big) =$$
$$= |A \cup B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 2|A \cap B \cap C|.$$

С учетом формулы включения – исключения получаем, что количество трудных задач равно

$$2|A \cup B \cup C| - |A| - |C| - |B| + |A \cap B \cap C| = 200 - 180 + |A \cap B \cap C| = 20 + |A \cap B \cap C|.$$

Значит, трудных задач на 20 штук больше, чем легких.

5. **(5 баллов)** Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых справедливо равенство

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

Решение: $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2 \quad \Leftrightarrow \qquad (1)$

$$\left(x^2 + 8x\right)\left(x^2 + 8x + 7\right) = y^2. \qquad (2)$$

Положим $z = x^2 + 8x + \frac{7}{2} \Rightarrow 2z = 2x^2 + 16x + 7 \in Z$. Из (2) находим

$$\left(z - \frac{7}{2}\right)\left(z + \frac{7}{2}\right) = y^2 \Leftrightarrow z^2 - \frac{49}{4} = y^2,$$

что эквивалентно $(2z - 2y)(2z + 2y) = 49$. Поскольку $(2z \pm 2y) \in Z$, а $49 = 1 \cdot 49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1 = -1 \cdot (-49) = (-7) \cdot (-7) = (-49) \cdot (-1)$, то остаются возможными только следующие шесть вариантов:

1) $\begin{cases} 2z - 2y = 1 \\ 2z + 2y = 49 \end{cases} \Rightarrow y = 12,\ 2z = 25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -9. \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} 2z - 2y = 7 \\ 2z + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 0,\ 2z = 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8. \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} 2z - 2y = 49 \\ 2z + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -12,\ 2z = 25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -9. \end{array}\right.$

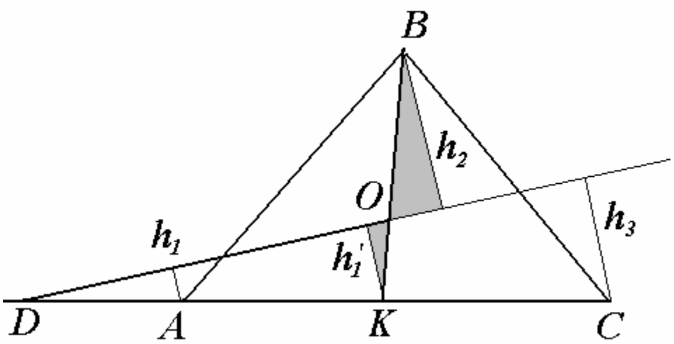
4) $\begin{cases} 2z - 2y = -1 \\ 2z + 2y = -49 \end{cases} \Rightarrow y = -12,\ 2z = -25 \Rightarrow x = -4.$

5) $\begin{cases} 2z - 2y = -7 \\ 2z + 2y = -7 \end{cases} \Rightarrow y = 0,\ 2z = -7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -7. \end{array}\right.$

6) $\begin{cases} 2z - 2y = -49 \\ 2z + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 12,\ 2z = -25 \Rightarrow x = -4.$

Ответ:
$(1;12), (1;-12), (-9;12), (-9;-12), (0;0), (-8;0), (-4;-12), (-4;12), (-1;0), (-7;0)$ (10 пар).

6. **(5 баллов)** Точка ***D*** лежит на продолжении стороны ***AC*** треугольника ***ABC***, площадь которого равна ***S***; при этом точка ***A*** находится между ***D*** и ***C***. Пусть ***O*** – точка пересечения медиан треугольника ***ABC***. Известно, что площадь треугольника ***DOC*** равна ***S₁***. Выразите площадь треугольника ***DOB*** через ***S*** и ***S₁***.



Решение: Покажем, что

$$S_{\Delta DOC} + S_{\Delta DOA} = S_{\Delta DOB} \qquad \textbf{(*)}.$$

Для этого (поскольку эти треугольники имеют общую сторону DO) достаточно показать, что длины перпендикуляров, опущенных на DO из вершин треугольника, удовлетворяют равенству

$$h_1 + h_3 = h_2 \qquad \textbf{(**)}.$$

Действительно, $h_1' = (h_1 + h_3)/2$ (свойство средней линии трапеции), а из подобия отмеченных серым треугольников следует, что $h_2 = 2h_1'$ (медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины). Отсюда вытекает справедливость (**).

Поскольку $S_{\Delta DOC} = S_{\Delta DOA} + S_{\Delta AOC}$, а $S_{\Delta AOC} = \frac{S}{3}$, получаем

Ответ: $S_{\Delta DOB} = 2S_1 - \frac{S}{3}$.